

Dreiecke als Elemente algebraischer Körper

1. Dreiecke

Betrachtet werden die Dreiecke des dreidimensionalen euklidischen Raumes. Wir fassen sie zu Klassen äquivalenter Dreiecke zusammen; zur gleichen Klasse sollen alle Dreiecke von gleicher **Gestalt, Zentrierung** und **Stellung** gehören. Dabei haben „gleiche Gestalt“ Dreiecke, die zueinander ähnlich sind; ein Dreieck lässt sich auf sechs Arten „zentrieren“, d. h. auf drei Arten lässt sich eine Ecke hervorheben und auf je zwei Arten kann der Umlaufsinn gewählt werden (Fig. 1); Dreiecke gleicher „Stellung“ besitzen parallele Normalen $\vec{a}_1 \times \vec{a}_2$ (Fig. 2).

Wenn wir im Folgenden von „Dreieck“ sprechen, so ist gemeint eine Klasse äquivalenter Dreiecke im zuvor beschriebenen Sinne. Zu jedem solchen Dreieck gehört ein Vektor-Zweibein nach Fig. 2: Zwischen dem bei der Zentrierung ausgewählten Punkt A und dem durch den (dabei ebenfalls angenommenen) Umlaufsinn festgelegten „nächsten Punkt“ B wird der Vektor \vec{a}_1 aufgespannt, zwischen A und dem dritten Punkt C des Dreiecks liegt der Spannvektor \vec{a}_2 .

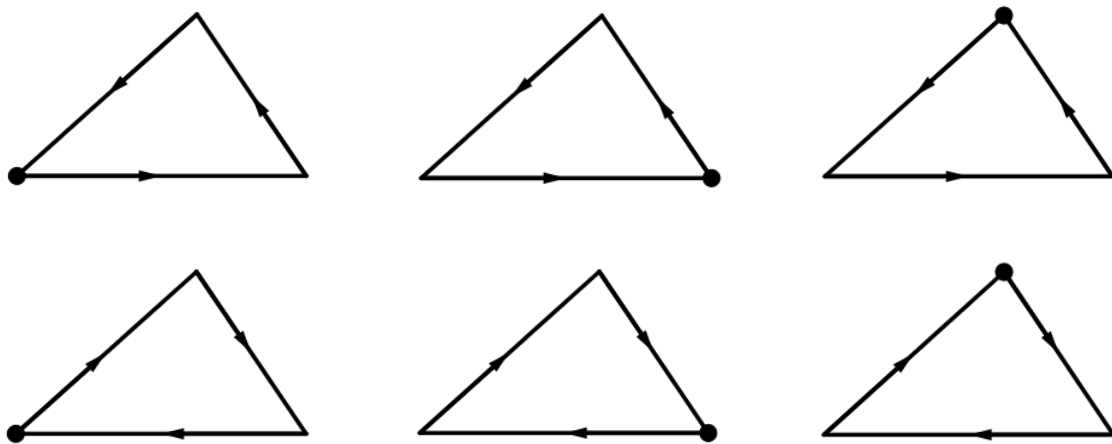


Fig. 1. Die sechs Arten, ein Dreieck zu zentrieren

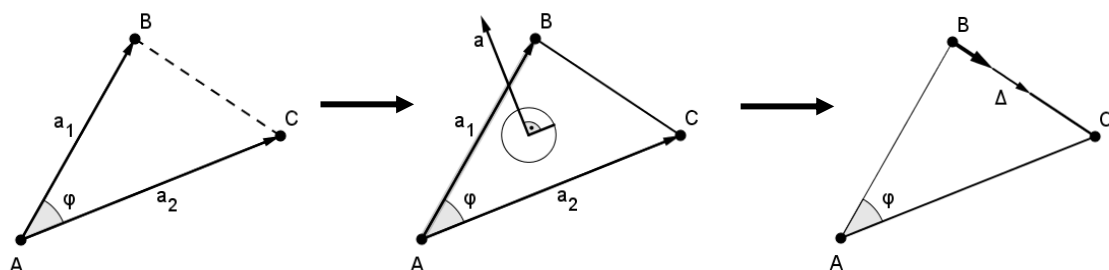


Fig. 2. Das einem Dreieck zugeordnete Zweibein \vec{a}_1, \vec{a}_2 , der zugehörige wesentliche Vektor \vec{a} und die zugeordnete Zahl α

Als wesentlicher Vektor \vec{a} des Dreiecks wird definiert:

$$(1) \quad \vec{a} := -\frac{\vec{a}_1 \times \vec{a}_2}{|\vec{a}_2|^2} = \frac{\vec{a}_2 \times \vec{a}_1}{|\vec{a}_2|^2}, \quad (\vec{a}_2 \neq \vec{n})$$

wobei $\vec{a}_1 \times \vec{a}_2$ das äußere Produkt zweier Vektoren und \vec{n} der Nullvektor ist.

Die **wesentliche Zahl** α des Dreiecks ist definiert durch

$$(2) \quad \alpha := \frac{\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2}{|\vec{a}_2|^2}, \quad (\vec{a}_2 \neq \vec{n})$$

dabei ist $\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2$ das innere Produkt der Vektoren \vec{a}_1 und \vec{a}_2

Zu jedem unserer Dreiecke (mit $\vec{a}_2 \neq \vec{n}$) existiert ein \vec{a} und ein α .

Umgekehrt ist auch jedem $\vec{a} \neq \vec{n}$ und beliebigem reellen α ein Dreieck zugeordnet:

Mit dem Einheitsvektor

$$(3) \quad \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = -\frac{\vec{a}_1 \times \vec{a}_2}{|\vec{a}_1 \times \vec{a}_2|} \quad (\vec{a} \neq \vec{n})$$

ist die Stellung des Dreiecks und sein Umlaufsinn festgelegt.

Und

$$(1^*) \quad |\vec{a}| = \frac{|\vec{a}_1|}{|\vec{a}_2|} \sin \varphi$$

bestimmt zusammen mit

$$(2^*) \quad \alpha = \frac{|\vec{a}_1|}{|\vec{a}_2|} \cos \varphi$$

den Öffnungswinkel (mit $0 < \varphi < \pi$).

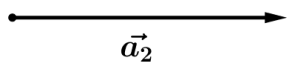
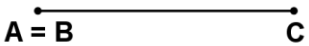
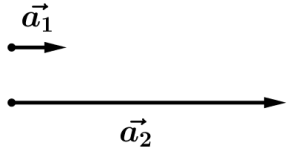
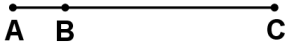
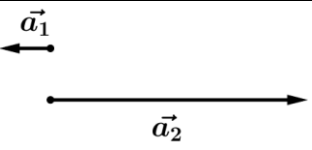
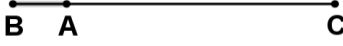
Es ist $\cot \varphi = \frac{\alpha}{|\vec{a}|}$, $\rho := \frac{|\vec{a}_1|}{|\vec{a}_2|} = \frac{|\vec{a}|}{\sin \varphi}$.

Öffnungswinkel φ und Seitenverhältnis ρ legen aber die Gestalt des Dreiecks fest.

Jedes unserer „Dreiecke“ wird also durch ein Paar $\Delta = (\alpha | \vec{a})$

bestehend aus einem Vektor und einer reellen Zahl α charakterisiert.

Den Fall $\vec{a} = \vec{n}$ werden wir in den folgenden Betrachtungen mit einbeziehen; hier ist die Deutung einfacher und als Grenzfall (Entartungsfall) der Dreiecke aufzufassen.

	Vektor-Zweibein	ausgeartetes Dreieck
$\alpha = 0$	$\bullet \vec{a}_1 = 0$ 	
$\alpha > 0$		
$\alpha < 0$		

(Figur 3): Die ausgearteten Dreiecke (α, \vec{n}) , $\vec{a}_2 \neq \vec{n}$ beliebig vorgegeben.

Wir gehen von einem beliebigen $\vec{a}_2 \neq \vec{n}$ aus. Ist $\alpha = 0$, so finden wir $|\vec{a}_1| = 0$, d.h. $\vec{a}_1 = \vec{n}$; wäre $|\vec{a}_1| \neq 0$, so hätte man in (2*) $\varphi = \frac{\pi}{2}$, was in (1*) auf $|\vec{a}| \neq 0$ führte und einen Widerspruch zur Annahme darstellte; mit $\vec{a}_1 = \vec{n}$ ist (1) und (2) auch erfüllt.

Bei $\alpha \neq 0$ folgt aus (2*) $|\vec{a}_1| \neq 0$ und $\varphi \neq \frac{\pi}{2}$, dies seinerseits erbringt mit (1*) $\varphi = 0$ oder $\varphi = \pi$, d.h. $\vec{a}_1 = \lambda \vec{a}_2$ ($\lambda \neq 0$).

In (2*) eingesetzt, ergibt sich

$$\left. \begin{array}{l} \varphi = 0: \alpha = |\lambda > 0| \\ \varphi = \pi: \alpha = -|\lambda < 0| \end{array} \right\} \Rightarrow \vec{a}_1 = \alpha \vec{a}_2$$

(1) und (2) werden offenbar erfüllt.

Zusammenfassend lässt sich sagen:

Jedem Paar $\Delta = (\alpha | \vec{a})$ (α ist eine beliebige Zahl, \vec{a} ist ein beliebiger Vektor der R_3) ist nun eines unserer Dreiecke zugeordnet, sei es nun ein echtes oder ein unechtes Dreieck.

2. Die Multiplikation von Dreiecken

Zwei Dreiecke Δ_1 und Δ_2 lassen sich immer so aneinanderlegen, dass die 1. Seite von Δ_2 mit der 2. Seite von Δ_1 zusammenfällt. Dies geht auf genau eine Weise.

Zwei so zusammengelegte Dreiecke spannen eine räumliche Ecke auf (Figur 4).

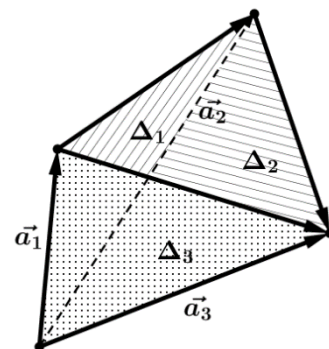
Mit Δ_1 und Δ_2 ist die dritte Seite Δ_3 dieser Ecke eindeutig bestimmt. Wir schreiben

$$(4) \quad \Delta_3 = \Delta_1 \circ \Delta_2.$$

Diese zweistellige Relation wird erfasst durch

$$(5) \quad \Delta_3 = (\gamma | \vec{c}) = (\alpha\beta - \vec{a} \cdot \vec{b} | \alpha\vec{b} + \beta\vec{a} + \vec{a} \times \vec{b}),$$

wenn $\Delta_1 = (\alpha | \vec{a})$ und $\Delta_2 = (\beta | \vec{b})$.



Figur 4. Geometrische Deutung von $\Delta_1 \circ \Delta_2 = \Delta_3$

Der Beweis werde geführt unter Benutzung bekannter Entwicklungssätze für das innere und äußere Produkt.

$$a) \quad \alpha\beta - \vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2}{|\vec{a}_2|^2} \cdot \frac{\vec{a}_2 \cdot \vec{a}_3}{|\vec{a}_3|^2} - \frac{\vec{a}_1 \times \vec{a}_2}{|\vec{a}_2|^2} \cdot \frac{\vec{a}_2 \times \vec{a}_3}{|\vec{a}_3|^2}$$

geht wegen

$$(\vec{t} \times \vec{u}) \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = (\vec{t} \cdot \vec{v})(\vec{u} \cdot \vec{w}) - (\vec{u} \cdot \vec{v})(\vec{t} \cdot \vec{w})$$

über in

$$\alpha\beta - \vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{|\vec{a}_2|^2 \cdot |\vec{a}_3|^2} \left\{ (\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2)(\vec{a}_2 \cdot \vec{a}_3) - (\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2)(\vec{a}_2 \cdot \vec{a}_3) + (\vec{a}_2 \cdot \vec{a}_2)(\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_3) \right\} = \frac{\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_3}{|\vec{a}_3|^2} = \gamma$$

b) Zunächst folgt unter Benutzung von

$$(\vec{t} \times \vec{u}) \times (\vec{v} \times \vec{w}) = (\vec{t}\vec{u}\vec{w})\vec{v} - (\vec{t}\vec{u}\vec{v})\vec{w},$$

dass

$$\begin{aligned} \alpha\vec{b} + \vec{a}\beta + \vec{a} \times \vec{b} &= \frac{1}{|\vec{a}_2|^2 \cdot |\vec{a}_3|^2} \left\{ -(\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2)(\vec{a}_2 \times \vec{a}_3) - (\vec{a}_1 \times \vec{a}_2)(\vec{a}_2 \cdot \vec{a}_3) + (\vec{a}_1 \times \vec{a}_2) \times (\vec{a}_2 \times \vec{a}_3) \right\} = \\ &= \frac{1}{|\vec{a}_2|^2 \cdot |\vec{a}_3|^2} \left\{ -(\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2)(\vec{a}_2 \times \vec{a}_3) - (\vec{a}_1 \times \vec{a}_2)(\vec{a}_2 \cdot \vec{a}_3) + (\vec{a}_1 \vec{a}_2 \vec{a}_3) \vec{a}_2 \right\} \end{aligned}$$

Zur Abkürzung werde gesetzt

$$(7) \quad \vec{x} := \alpha\vec{b} + \vec{a}\beta + \vec{a} \times \vec{b}.$$

Die innere Multiplikation mit $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ führt auf

$$\begin{aligned} \vec{x} \cdot \vec{a}_1 &= 0, \\ \vec{x} \cdot \vec{a}_3 &= 0, \\ \vec{x} \cdot \vec{a}_2 &= \frac{(\vec{a}_1 \vec{a}_2 \vec{a}_3)}{|\vec{a}_3|^2}. \end{aligned}$$

Aus den beiden Gleichungen schließt man auf

$$\vec{x} = \lambda \cdot \vec{a}_1 \times \vec{a}_3,$$

so dass

$$\vec{x} \cdot \vec{a}_2 = -\lambda (\vec{a}_1 \vec{a}_2 \vec{a}_3) = \frac{(\vec{a}_1 \vec{a}_2 \vec{a}_3)}{|\vec{a}_3|^2}.$$

Bei $(\vec{a}_1 \vec{a}_2 \vec{a}_3) \neq 0$ folgt daraus

$$\lambda = -\frac{1}{|\vec{a}_3|^2},$$

also die Behauptung

$$\vec{x} = -\frac{\vec{a}_1 \times \vec{a}_3}{|\vec{a}_3|^2} = \vec{c}.$$

Auch bei $(\vec{a}_1 \vec{a}_2 \vec{a}_3) = 0$ lässt sich der Beweis führen, indem man

$$\vec{a}_3 = \mu_1 \vec{a}_1 + \mu_2 \vec{a}_2$$

In (6) einführt.

3. Die Gruppeneigenschaft der \circ Verknüpfung.

Es bleibt zu zeigen, dass die Paare bezüglich der für sie in (5) erklärten Multiplikation eine Gruppe bilden, wenn man $(\mathbf{0}|\vec{u})$ ausschließt. Man sieht durch Einsetzen in (5) sofort, dass $(\mathbf{1}|\vec{u})$ das neutrale Element ist. Die Gültigkeit des Assoziativgesetzes folgt anschaulich mit Fig. 5.

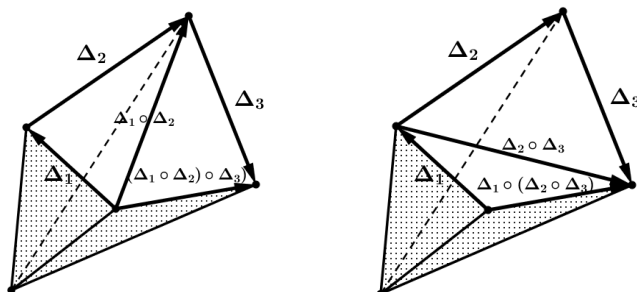


Fig. 5. Geometrischer Beweis für die Gültigkeit des Assoziativgesetzes

$$(\Delta_1 \circ \Delta_2) \circ \Delta_3 = \Delta_1 \circ (\Delta_2 \circ \Delta_3)$$

Rechnerisch weist man sie mit dem Entwicklungssatz

$$\vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w}) = (\vec{u} \cdot \vec{w}) \cdot \vec{v} - (\vec{u} \cdot \vec{v}) \cdot \vec{w}$$

Die geometrische Bedeutung der Multiplikation der Paare gestattet leicht die Konstruktion des inversen Elements, denn inverse Dreiecke unterscheiden sich nur durch den Richtungssinn ihres Stellungsvektors (Fig. 6).

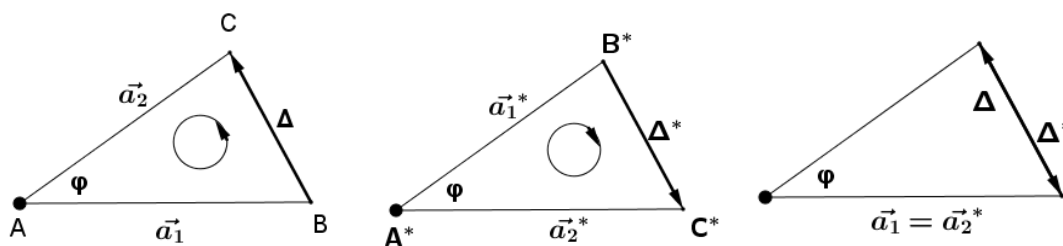


Fig. 6. Geometrische Deutung von $\Delta \circ \Delta^* = (\mathbf{1}|\vec{n})$

Hat Δ das Seitenverhältnis ρ , so hat Δ^* das Verhältnis ρ^{-1} und wegen $\varphi = \varphi^*$ folgt

$$|\vec{a}^*| = \rho^{-1} \cdot \sin \varphi = |\vec{a}| \cdot \rho^{-2},$$

$$\vec{a}^* = \rho^{-1} \cdot \cos \varphi = \alpha \cdot \rho^{-2},$$

so dass wegen $\rho^2 = \alpha^2 + \vec{a}^2$

$$(8) \quad (\alpha|\vec{a})^* = \left(\frac{\alpha}{\alpha^2 + \vec{a}^2} \mid \frac{-\vec{a}}{\alpha^2 + \vec{a}^2} \right).$$

Durch Nachrechnen bestätigt man, dass dieses Element Δ^* invers zu Δ ist.

Die Rechnung zeigt ebenso wie die Anschauung die Ungültigkeit des Kommutativgesetzes.

4. Die Addition von Dreiecken.

Eine zweite Verknüpfung werde erklärt durch

$$(\alpha|\vec{a}) * (\beta|\vec{b}) = (\alpha + \beta | \vec{a} + \vec{b}),$$

wobei + sowohl die Addition von Zahlen als auch von Vektoren bezeichnet. Diese Verknüpfung gestattet keine einfache geometrische Deutung anhand der Dreiecke, ist aber algebraisch naheliegend. Man zeigt leicht, dass die Dreiecke bezüglich dieser Verknüpfung eine Abel-Gruppe bilden. Ebenso folgt ohne besondere Voraussetzungen, dass beide Verknüpfungen distributiv sind:

$$(\Delta_1 * \Delta_2) \circ \Delta_3 = \Delta_1 \circ \Delta_3 * \Delta_2 \circ \Delta_3.$$

Die Dreiecke bilden also bezüglich \circ und $*$ einen **Schiefkörper**.

5. Koordinatendarstellung.

Die Vektoren seien bezogen auf eine orthonormierte Basis:

$$\vec{a} = \alpha_1 \vec{i} + \alpha_2 \vec{j} + \alpha_3 \vec{k}.$$

Für α werde im Folgenden α_0 geschrieben, so dass

$$(\alpha|\vec{a}) = (\alpha_0 | \alpha_1 \vec{i} + \alpha_2 \vec{j} + \alpha_3 \vec{k}).$$

Aus den Schiefkörper-Axiomen und der Definition von \circ und $*$ folgt

$$\begin{aligned} (\alpha|\vec{a}) &= (\alpha_0|\vec{n}) * (\alpha_1|\vec{i}) * (\alpha_2|\vec{j}) * (\alpha_3|\vec{k}) = \\ &= (\alpha_0|\vec{n}) \circ (\alpha_1|\vec{i}) \circ (\alpha_2|\vec{j}) \circ (\alpha_3|\vec{k}) \end{aligned}$$

Schreibt man für $*$ und \circ einfacher + und \cdot ; ersetzt man $(\alpha_1|\vec{i})$ durch i ; $(\alpha_0|\vec{n})$ durch α_0 usw., so gilt

$$(9) \quad (\alpha|\vec{a}) = \alpha_0 + \alpha_1 i + \alpha_2 j + \alpha_3 k.$$

Aus der Definition der Multiplikation und den Eigenschaften des äußeren Produkts folgen die Produkte der Basisvektoren:

	\vec{i}	\vec{j}	\vec{k}
\vec{i}	-1	\vec{k}	$-\vec{j}$
\vec{j}	$-\vec{k}$	-1	\vec{i}
\vec{k}	\vec{j}	$-\vec{i}$	-1

Jedes Element dieser Tabelle lässt sich auch unmittelbar anschaulich durch das Aneinanderlegen von Dreiecken gewinnen (Fig.7).

Der Schiefkörper der Dreiecke ist isomorph zum Schiefkörper der Quaternionen. Wir schreiben auch in „Polarkoordinaten“ ein Dreieck (eine Quaternion) in der Form

$$(10) \quad (\alpha|\vec{a}) = \rho(\cos\varphi + j\sin\varphi)$$

wo ρ das Seitenverhältnis, φ den Öffnungswinkel und j den Stellungsvektor des Dreiecks mit $j \circ j = -1$ bedeutet.

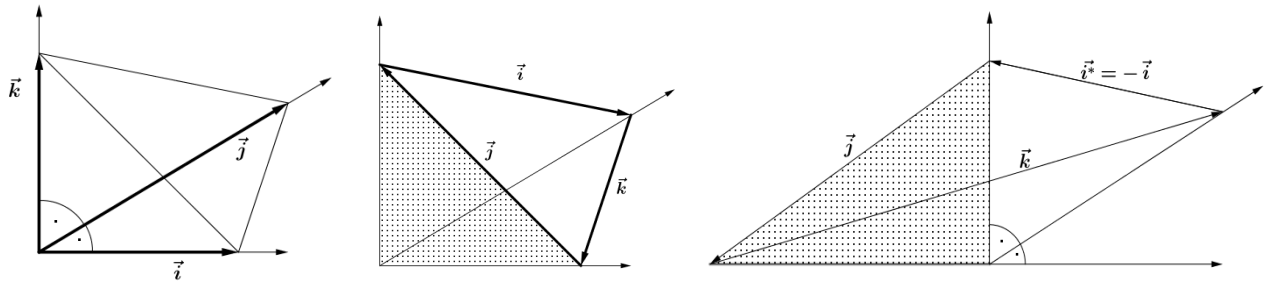


Fig. 7 Beispiele für Dreiecksmultiplikation

$$\begin{aligned}
 (-\vec{i}) \circ \vec{j} = -\vec{k} &\Rightarrow \vec{i} \circ \vec{j} = \vec{k} & \vec{j} \circ \vec{i} = -\vec{k} \\
 \vec{k} \circ (-\vec{i}) = -\vec{j} &\Rightarrow \vec{k} \circ \vec{i} = \vec{j} & \vec{i} \circ \vec{k} = -\vec{j} \\
 & \vec{j} \circ \vec{k} = \vec{i} & \vec{k} \circ \vec{j} = -\vec{i}
 \end{aligned}$$

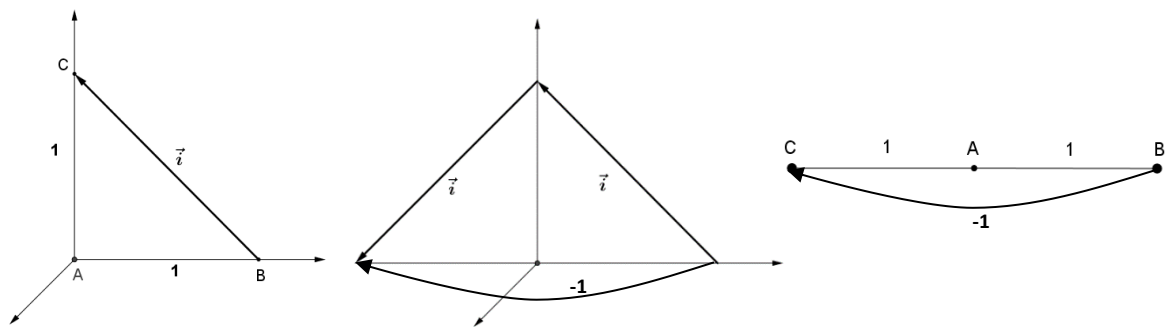
6. Unterkörper

Man zeigt leicht: Zwei Dreiecke $(\alpha|\vec{a})$ und $(\beta|\vec{b})$ sind bei der Multiplikation genau dann vertauschbar, wenn \vec{a} und \vec{b} linear abhängig sind. Dreiecke, deren Stellungsvektoren kollinear sind, bilden also einen jeweils kommutativen Unterkörper. Jeder dieser Körper ist isomorph zum Körper der komplexen Zahlen. Dreiecke eines solchen Unterkörpers kann man immer in eine (Gaußsche) Ebene bringen.

7. Zusammenfassung

Unter Berücksichtigung neuerer Gesichtspunkte wurde der historisch gegebene Zusammenhang zwischen Vektor- und Quaternionen-Rechnung wieder ins Blickfeld gerückt. Didaktisch zeigte sich: Die Quaternionen lassen sich geometrisch als Dreiecke einführen, die algebraisch durch ein Paar, bestehend aus Zahl und Vektor, charakterisiert sind. Die geometrische Darstellung in einem vierdimensionalen Vektorraum erübrigt sich so. Formal vollzieht sich die Einführung in Analogie zur Einführung der komplexen Zahlen als Paare reeller Zahlen. Man kann die Schiefkörper-Axiome deduzieren, indem man sich auf das Rechnen mit reellen Zahlen und Vektoren bezieht. Alle Axiome der Multiplikation lassen sich auch anschaulich gewinnen.

Geht man davon aus, dass der Begriff des Vektors anschaulicher ist als jener der Verschiebung, so mag die Erfahrung des Verfassers plausibel sein: Der hier benutzte Begriff des Dreiecks ist anschaulicher als der Begriff der Drehstreckung. Dies zeigt sich nicht nur bei der Behandlung der Quaternionen, sondern auch bereits bei der geometrischen Einführung der komplexen Zahlen (Fig. 8).



Figur 8. Erläuterungen zu $(0|\vec{i}) \circ (0|\vec{i}) = (-1|\vec{n})$
mit den Repräsentanten $\vec{a}_1 = \vec{k}$, $\vec{a}_2 = \vec{j}$ bzw. $\vec{a}'_1 = \vec{j}$, $\vec{a}'_2 = -\vec{k}$

Die Schüler sagen: Bei der Deutung der Zahlen als Dreiecke sind die nicht-reellen Zahlen anschaulicher als die reellen, denn diesen entsprechen ausgeartete Dreiecke mit einem Öffnungswinkel von 0° bzw. 180° .

Die Einführung der Addition ganzer Zahlen unter Benutzung des geometrischen Modells der Vektoraddition ist didaktisch anerkannt. Ihr entspräche das Modell der Dreiecksmultiplikation zur Motivierung der Multiplikationsregeln ganzer Zahlen nach Fig. 9. Legt man die erste Seite des „Dreiecks“ (-3) an die zweite Seite des „Dreiecks“ (-2), so ergibt sich als Resultat das „Dreieck“ (+6).

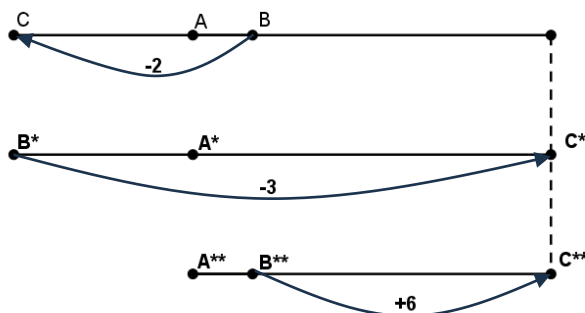


Fig. 9 Darstellung von $(-2|\vec{n}) \circ (-3|\vec{n}) = (+6|\vec{n})$